

高水位時の河川堤体の安定に対する粒子解析からの検討

日本文理大学 工学部 建築学科 土木コース

山下 彰彦

高水位時の河川堤体に対する粒子法解析からの検討

山下 彰彦

1. SPH 粒子法

SPH 法は、偏微分方程式の 1 階の空間微分項を Kernel 関数を用いて積分近似する手法である。粒子法による非圧縮粘性流体解析の理論の基礎となる式について記述する。

流速、密度、温度などの物理量 $f(x)$ は、Kernel 関数近似を用いて積分表現することができる。

$$f(x) \approx \int f(x')W(x-x',h)dx' \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 W は重み関数であり、現在では 3 次以上の Spline 関数を使用されている。また h は影響半径をあらわす。いま、任意の物理量に関する、1 階の空間微分を考えると、

$$\begin{aligned} \nabla f(x) \approx & \int_V \nabla [f(x')W(x-x',h)]dx' \\ & - \int_V f(x')[\nabla W(x-x',h)]dx' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

と表され、(2)式の右辺第 1 項は Gauss の定理により、解析領域の境界積分に変換されるが、重み関数の値域は境界内部に存在するため、境界積分はゼロとなる。

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla [f(x')W(x-x',h)]dx' \\ & = \int_S [f(x')W(x-x',h)] \cdot \hat{n} dS = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで \hat{n} は境界積分領域表面における法線ベクトルである。したがって、任意の物理量の偏微分項は、重み関数に関する 1 階微分のみを考慮した次式となる。

$$\nabla f(x) \approx - \int f(x')[\nabla W(x-x',h)]dx' \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、ある空間内部に有限個の評価点を考え、重み関数 W を用いて、空間内部に分布する物理量を次式により中心の評価点に内挿する。

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) W(x-x^j, h) \quad \dots\dots\dots(5)$$

J は影響半径内部に存在する他の粒子群、 ρ は密度、 m は質量である。Spline 補間の性質から、上式は、評価点数が増大すると正解にかぎりなく近接する。(5)式を(4)式に代入すると、Kernel 近似を粒子場へ離散化した下式が求められる。

$$\nabla f(x) \approx - \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) \nabla W(x-x^j, h) \quad \dots\dots\dots(6)$$

上式は、微分操作により次式の表現と同等であることも証明できる。

$$\nabla f(x^i) \approx \frac{1}{\rho^i} \sum_{j=1}^N m^j [f(x^i) - f(x^j)] \nabla W(x^i - x^j, h) \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\nabla f(x^i) \approx -\rho^i \sum_{j=1}^N m^j \left(\frac{f(x^i)}{(\rho^i)^2} + \frac{f(x^j)}{(\rho^j)^2} \right) \nabla W(x^i - x^j, h) \quad \dots\dots\dots(8)$$

上記(6)~(8)式は任意の物理量の空間に関する1階の偏微分項を、粒子場によって表現した式であり、一般の偏微分方程式にたいして適用が可能となる。固体の問題においては、応力場は変位場の1階微分であるため通常(8)式を用いて、変位場から応力場が直接表現可能となる。また流体解析では、以下の節に記すように、圧力場の **gradient** や粘性項に関する **Laplacian** が粒子場によって表現可能となる。このように **SPH** 法は、粒子場を用いた偏微分方程式の解法のひとつであり、熱伝導方程式、波動方程式なども同一の手法で離散近似が可能である。したがって、連成した現象(流体と固体、固体と熱伝導など)の解析には都合がよいと考えられる。

2階空間微分については **SPH** 法は **Taylor** 展開を用いて以下の式を導出する。

$$\nabla^2 u_i = -2 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{u_j - u_i}{|x_{ij}|^2} x_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad \dots\dots\dots(9)$$

差分法は2階以上の空間微分式を **Taylor** 展開により求めるのが一般的であるが、**SPH** 法でも同様の展開操作をおこない、重み関数の性格を用いて上式のような比較的単純な式を導いている。

Navier-Stokes 方程式の時間積分法として、ここでは **SMAC** アルゴリズムを採用する。**SMAC** 法は非圧縮粘性流体の差分解法で広く使用されるアルゴリズムである。**SMAC** 法では、現時刻(n ステップ)における流速 u 、圧力 P 用いて仮の速度をまず求める。

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad} P^n + \nu \nabla^2 u_i^n + f \right) \quad \dots\dots\dots(10)$$

仮の流速 \tilde{u} はこのままでは連続の式を満たさないため、非回転速度場 u' を用いて、 $n+1$ ステップ目の速度を表すことにする。このとき u' は連続性を満たさなければならない。

$$u_i^{n+1} = u_i^* + u_i' \quad \dots\dots\dots(11)$$

一方、 $n+1$ ステップでの圧力場は

$$P^{n+1} = P^n + P' \quad \dots\dots\dots(12)$$

と書け、式(10)、(11)、(12)を用いて、 $n+1$ ステップにおける流速 u^{n+1} は

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad} p^{n+1} + \nu \nabla^2 u_i^n + f \right) \\ &= u_i^* - \Delta t \frac{1}{\rho} \text{grad} P' \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。 u^* は連続の式を満たさなくてはならないので、上式の発散をとると次式の圧力に関するポアソン方程式が求められる。

$$\nabla^2 P' = \frac{\rho}{\Delta t} \text{div} u_i^* \quad \dots\dots\dots(14)$$

このポアソン方程式は2階の偏微分式であり、したがって **SPH** 法の基礎式から直接に離散化することができない。ここでは圧力 P に関する1階微分を中央差分近似式を用いて表し、その差分式に **SPH** 法の基礎式を適用して2階微分を表す **Cleary** らの方法にしたがい、ポアソン方程式の左辺を離散化する。

$$\nabla^2 P' = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \left(\frac{4}{\rho_a + \rho_b} \right) \frac{P_{ab} r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{|r_{ab}|^2} \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここで $P_{ab}=P_a-P_b$, $r_{ab}=r_a-r_b$ である。

一方、ポアソン方程式の右辺については、速度に関する1階微分であるから、

$$\nabla^2 P = \rho_i \sum_j m_j \left(\frac{u_i^*}{\rho_i^*} + \frac{u_j^*}{\rho_j^*} \right) \cdot \nabla W(x^i - x^j, h) \quad \dots\dots\dots(16)$$

と離散化することができる。SMAC 法による SPH 解析手法(以下 SMAC-SPH)にしたがった非圧縮粘性流体の定式化は以上であり、まず(10)式により、仮の流速 \tilde{u} を陽的に求め、その速度により粒子を移動させる(仮の移流計算)。次に非圧縮性条件を満たすように(20)式の圧力ポアソン方程式を陰的に解いて修正された圧力、速度を求め粒子を移動させる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$P^{n+1} = P^n + \Delta P \quad \dots\dots\dots(18)$$

粒子の真の移流計算((17)式)の際には仮の移流分は補正する。これで SPH 法による非圧縮粘性流れ解析の1ステップが完了する。これを繰り返すことによって流体挙動を表現する。

2. SPH 粒子法による河川問題の解析

解析領域については、図1に横断図を示す。岩盤は剛体であって変位を許さないものとし、橋脚は変位を許さずその底部は岩盤に固定されているものとした。橋脚形状位置については、円柱形状断面と楕円形状断面と楕円形状断面+河川水流と斜め交差の3タイプを設定した。使用した粒子数は約270万個で、土砂の比重 ρ は1.8とした。

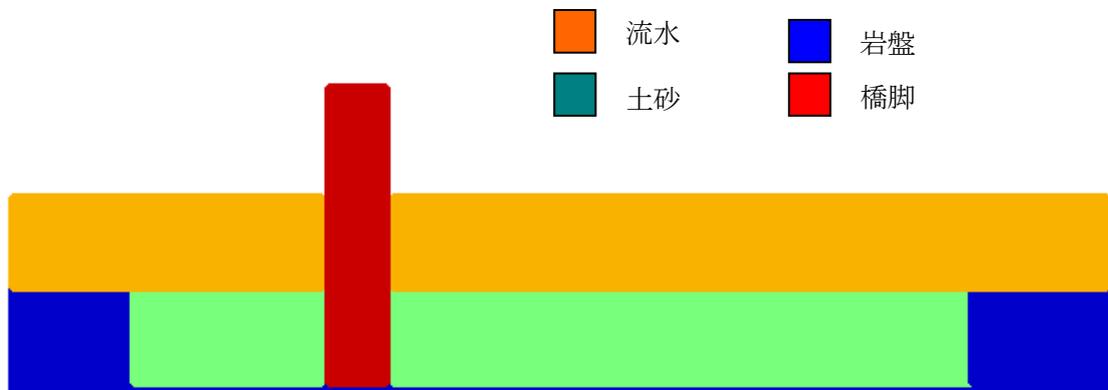


図1 解析領域の横断図

円柱形状断面の場合における解析領域全体の鳥瞰図を図2に示す。スタート時点では土砂厚さは同じ高さであるとした。次に、円柱形状断面の場合における、河川流水を受けたときの時間経過による円形状断面橋脚モデルでの土砂厚さの解析計算結果を示す。図3は時間経過 $t=400$ のときの土砂厚さを示し、図4は時間経過 $t=2000$ のときの土砂厚さを示す。時間が経過するにつれて土砂厚さが減少するが、特に左からくる水流に対して橋脚の下流側のV字2方向で土砂の厚さが著しく減少しており、橋脚のすぐ上流方においても土砂厚さの減少が目立っている。

図5は楕円柱形状断面で斜め交差橋脚モデルの場合における時間経過 $t=2000$ のときの土砂厚さを示す。時間が経過するにつれて土砂厚さが減少するが、顕著な減り方をしているのは、橋脚のすぐ上流方や橋脚上流方向のすぐ横のところである。

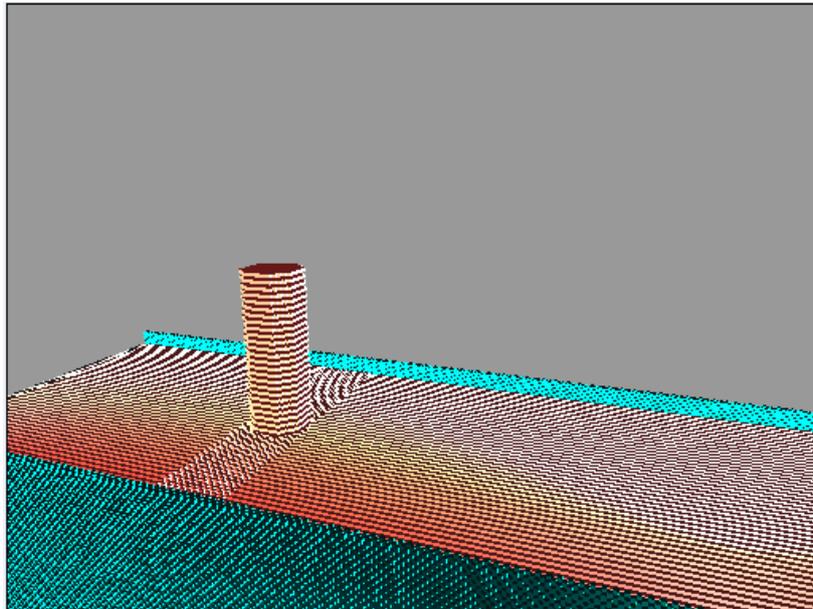


図 2 円柱形状断面橋脚モデルの鳥瞰図

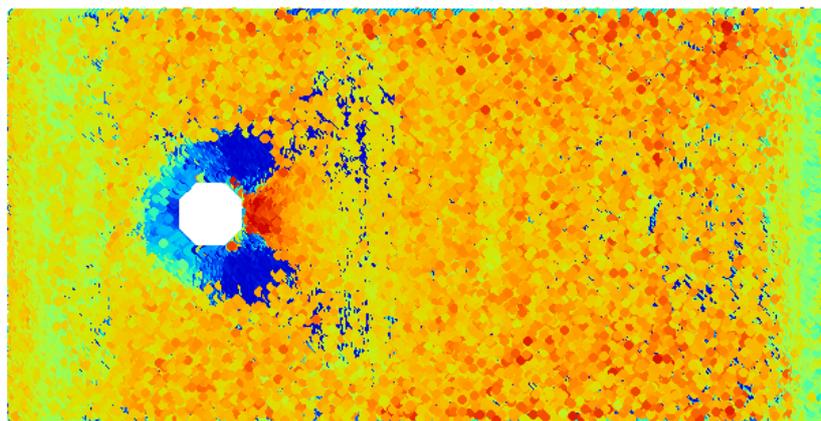


図 3 円形状断面橋脚モデルでの $t=400$ での土砂厚さ

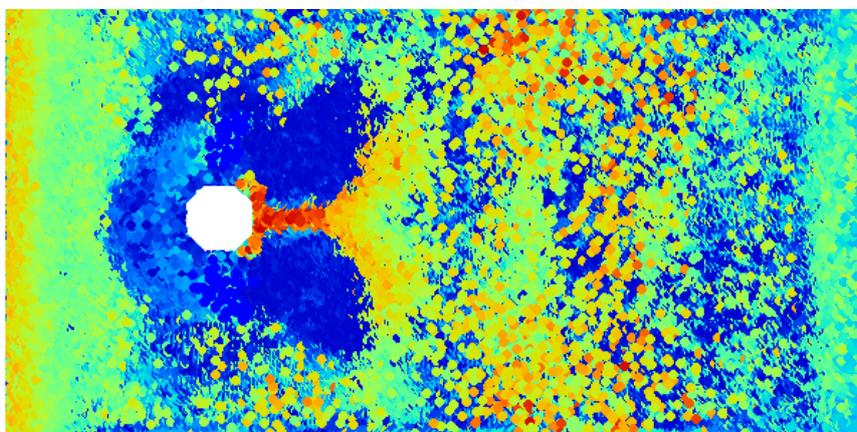


図 4 円形状断面橋脚モデルでの $t=2000$ での土砂厚さ

図 6 は、楕円柱形状断面で斜め交差橋脚モデルの場合における、河川流水を受けたときの時間経過 $t=2000$ のときの土砂厚さを示す。橋脚付近の土砂の減る動きは、川の上流方からみて、橋脚の下流方部分の右に顕著に土砂高さ低下が生じており、橋脚の下流方部分の左は余り土砂高さ低下が生じない。また、橋脚の上流方部分の左付近に比較的大きな土砂高さ低下が生じる。

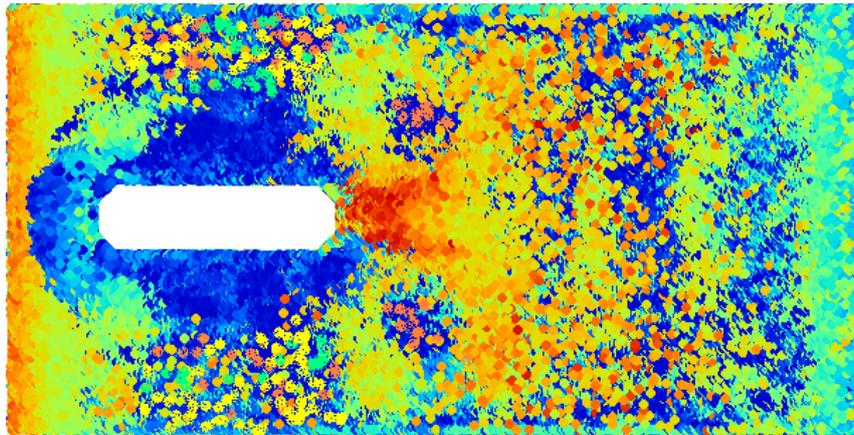


図 5 楕円形状断面橋脚モデルでの $t=2000$ での土砂厚さ

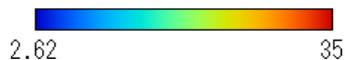
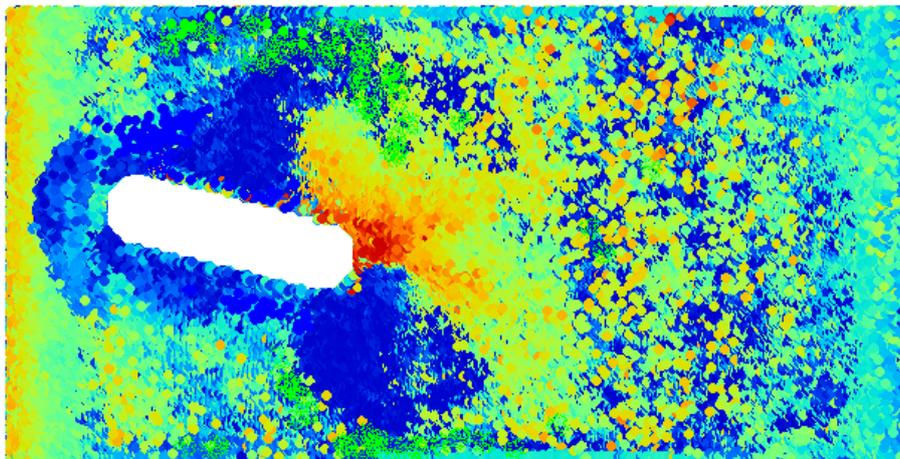


図 6 楕円形状断面で斜め交差橋脚モデルでの $t=2000$ での土砂厚さ

3. あとがき

粒子法での理論考察を行い、SPH 粒子法を使って、流水（非圧縮性流体）と河床土砂との連成問題について解析の計算を行った。SPH 粒子法は現象をどのくらいの精度で追うことができるか、どの解析アルゴリズムや重み関数を持ち込むとよいのかなどは、理論解（限られた問題だけになるが）と測定値の両者に対して計算値との突合せをすることが必要であり、今後の課題である。水路での流水の動きについては、理論解（限られた問題だけになるが）と測定値の両者に対し計算値との比較が行われており、流体の動きはよくとらえられること、波浪などの水圧については計算値の方が瞬間値として実測値より大きな値となる傾向であることがわかってきている。